Résumé 18 : Equations différentielles

I est un intervalle réel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E est un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel normé de dimension finie n.

I Le cadre

§ 1. ***Equation différentielle d'ordre** 1.*— On le définit en toute généralité sur un espace vectoriel de dimension finie E.

Définition I.1

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur E toute équation du type

$$x' = a(x) + b \quad (\mathscr{E}),$$

où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$, b une application continue de I dans E.
La fonction inconnue est alors $t \in I \longmapsto x(t) \in E$. On appelle

- **solution** *toute fonction $\varphi \in \mathscr{D}^1(I, E)$ telle que*

$$\text{pour tout } t \in I,\ \varphi'(t) = a_t\big(\varphi(t)\big) + b(t).$$

- **courbe intégrale** *de cette équation toute courbe représentative d'une solution.*
- **équation homogène associée** *l'équation $x' = a(x), \quad (\mathscr{H})$.*

Nous noterons $\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathscr{E}}} \subset \mathscr{C}^1(I, E)$ l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathscr{E})$, et $\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathscr{H}}} \subset \mathscr{C}^1(I, E)$ l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée $(\mathscr{H})$.

Attention au fait que a dépend à la fois de t et de x : $a \in \mathscr{C}^0(I, \mathscr{L}(E))$. Ainsi, pour tout $t \in I, a_t$ est un endomorphisme de E, que nous notons aussi parfois $a(t)$.
L'équation est homogène lorsque la fonction nulle en est une solution, i.e lorsque b est nulle. Concernant la régularité des solutions,

Proposition I.2

Toute solution est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Si on se fixe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E, et que l'on pose pour tout $t \in I, A(t) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a_t), B(t) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(b(t)\big)$ et $X(t) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(x(t)\big)$, alors l'équation différentielle prend la forme d'un système différentiel linéaire d'ordre 1 suivant :

$$\boxed{X' = AX + B}.$$

§ 2. ***Ensembles de solutions.***— Leurs structures vont simplifier leur détermination.

Proposition I.3 (*Principe de superposition*)

Soient $b_1, b_2 \in \mathscr{C}^0(I, E)$ et φ_1, φ_2 deux solutions de $x' = a(x)+b_1$ et $x' = a(x)+b_2$. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, la fonction $\alpha\varphi_1 + \varphi_2$ est solution de $x' = a(x) + \alpha b_1 + b_2$.

Exemples :

Ce théorème permet par exemple de résoudre $x'' + x' + x = \cos(t)$, en écrivant $\cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$.

Il y a un lien fort entre ces deux ensembles, conséquence de la linéarité de l'application $\Psi : x \longmapsto x' - a(x)$, dont $\mathrm{Sol}_{\mathscr{H}}$ est le noyau :

Théorème I.4 (*Structure des solutions*)

(i) $\mathrm{Sol}_{\mathscr{H}}$ est un sous-espace vectoriel de l' espace vectoriel $\mathscr{C}^1(I, E)$.

(ii) $\mathrm{Sol}_{\mathscr{E}}$ est un sous-espace affine de l' espace vectoriel $\mathscr{C}^1(I, E)$, dont l'ensemble des directions est $\mathrm{Sol}_{\mathscr{H}}$. Autrement dit, pour tout $\varphi_0 \in \mathrm{Sol}_{\mathscr{E}}$,

$$\boxed{\mathrm{Sol}_{\mathscr{E}} = \varphi_0 + \mathrm{Sol}_{\mathscr{H}}}.$$

Le (ii) nous dit que pour déterminer les solutions de $(\mathscr{E})$, il faut et il suffit de déterminer une solution particulière de $(\mathscr{E})$ et toutes les solutions de $(\mathscr{H})$.

§ 3. ***Problème de Cauchy.***— On définit ce qu'est une solution avec condition initiale.

Définition I.5

Soit $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$. On dit que φ est une solution au problème de Cauchy de $(\mathscr{E})$ en (t_0, x_0) lorsque φ est solution de l'équation différentielle $(\mathscr{E})$ et qu'elle vérifie $\varphi(t_0) = x_0$.

Puisque φ est de classe $\mathscr{C}^1$, elle est une primitive de sa dérivée, et le problème de Cauchy peut s'écrire sous forme intégrale :

$$\text{Pour tout } t \in I, \qquad \boxed{\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)\big(\varphi(s)\big) + b(s)ds}.$$

§ 4. ***Cas d'une équation linéaire scalaire d'ordre*** n**.–** On appelle ainsi toute équation du type

$$x^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)}(t) = b(t), (\mathscr{E}_n)$$

où les a_i et b sont des fonctions continues sur I dans $\mathbb{K}$. Une solution est une fonction scalaire $x \in \mathscr{D}^k(I,\mathbb{K})$ (le mot 'scalaire' signifiant que les inconnues sont à valeurs réelles ou complexes).

Il est important de noter que ces équations scalaires d'ordre n forment un cas particulier des équations précédentes, i.e sont équivalentes au système $X' + AX = B$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{K}^n)$, et

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

est une matrice compagnon pour tout $t \in I$. Le problème de Cauchy devient alors

Définition I.6

Soient $t_0 \in I, x_0, x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{K}$. On appelle problème de Cauchy en $(t_0, x_0, \dots, x_{n-1})$ de $(\mathscr{E}_n)$ toute fonction solution de $(\mathscr{E}_n)$ qui vérifie pour tout $k \in [\![0, n-1]\!] x^{(k)}(t_0) = x_k$.

§ 5. ***Dimension de*** $\mathrm{Sol}_{(\mathscr{H})}$**.–** Le théorème suivant est d'une importance primordiale dans la théorie des EDL. On reprend les notations et les hypothèses qui prévalent depuis le chapitre 1 :

Théorème I.7 (*de Cauchy-Lipschitz*)

Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = a(x) + b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ possède une et une seule solution.

Corollaire I.8

Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\Psi \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Sol}_{\mathscr{H}} & \longrightarrow & E \\ \varphi & \longmapsto & \varphi(t_0) \end{array}\right.$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels . Ainsi, $\boxed{\dim \mathrm{Sol}_{\mathscr{H}} = n}$.

Pour les équations scalaires d'ordre n, cela donne :

Corollaire I.9

Pour tout $t_0 \in I$, et tout $n-$uplet $(x_0, \dots, x_{n-1})$ de $\mathbb{K}^n$, il existe une unique solution de $\mathscr{E}$ qui vérifie pour tout $k \in [\![0, n-1]\!], \varphi^{(k)}(t_0) = x_k$.

REMARQUES :

Pour une EDL scalaire d'ordre 1, cela signifie que deux courbes intégrales ne peuvent se croiser, et que les courbes intégrales partitionnent la portion du plan paramétrée par $I \times \mathbb{K}$. Pour une EDL scalaire d'ordre 2, cela signifie que deux courbes intégrales distinctes ont des pentes distinctes aux points où elles se croisent.

§ 6. ***Système fondamental de solutions de*** $(\mathscr{H})$**.–** Considérons un système $X' = AX$ homogène, où $A : t \longmapsto A(t) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ peut dépendre du temps. On appelle **système fondamental de solutions de** $(\mathscr{H})$ toute base $(X_1, \dots, X_n)$ de $\mathrm{Sol}_{(\mathscr{H})}$. Bien noter qu'ici, pour tout entier k, $X_k \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K}^n)$.

A toute famille de n vecteurs $(X_1, \dots, X_n)$ solutions de (H), on associe une matrice **Wronskienne** ainsi :

$$W : t \in I \longmapsto \big(X_1(t), \dots, X_n(t)\big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

On appelle **Wronskien** son déterminant $w \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$. A t fixé, on a évidemment l'équivalence entre le fait que $W(t)$ est inversible, que $w(t)$ est un scalaire non nul, et enfin que $\big(X_1(t), \dots, X_n(t)\big)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{H})$.

Proposition I.10

La Wronskienne est solution de l'EDL d'ordre 1 suivante : $W' = AW$.

Propriétés I.11

Soient $(X_1, \dots X_n)$ n fonctions solutions de $X' = AX$, et w leur Wronskien. Alors, on a équivalence entre

(i) Pour tout $t \in I$, $\big(X_1(t), \dots, X_n(t)\big)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, i.e w ne s'annule pas sur I.

(ii) Il existe un réel $t \in I$, tel que $\big(X_1(t), \dots, X_n(t)\big)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, i.e w n'est pas la fonction nulle.

(iii) $(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions de $(\mathscr{H})$.

Notez que l'on a un principe du tout ou rien ici : soit w ne s'annule jamais, soit il s'annule tout le temps.

II Exponentielle matricielle

§ 1. ***Définition et propriétés.—*** Elle est basée sur l'existence, dans tout espace vectoriel de dimension finie, d'une norme sous-multiplicative. C'est elle qui garantit la convergence aboslue, donc normale de la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0} \frac{A^p}{p!}$ pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note alors $e^A = \exp A = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{A^p}{p!}$.

Exemples :

Il faut savoir calculer l'exponentielle d'un matrice diagonale, d'un matrice triangulaire nilpotente de petite taille, d'un matrice 2×2. On peut d'ailleurs penser à utiliser un polynome annulateur pour obtenir les puissances de A.

Propriétés II.1

(i) Pour tout $P \in GL_n(\mathbb{K}), \exp\left(PAP^{-1}\right) = Pe^AP^{-1}$.

(ii) $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est continue.

(iii) Si $AB = BA$, alors $\exp(A+B) = e^A e^B$.

(iv) Pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), e^A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}$.

(v) $\det e^A = e^{\mathrm{Trace}(A)}$.

(vi) Si A est anti-symétrique, $e^A \in SO_n$.

(vii) $\psi : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{tA} \in GL_n$ est dérivable et

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \qquad \psi'(t) = Ae^{tA}.$$

§ 2. ***Système différentiel linéaire à coefficients constants.—*** L'exponentielle d'une matrice, **dans le cas où celle-ci est à coefficients constants** permet, au moins théoriquement, la résolution des systèmes linéaires associés :

Théorème II.2

- *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$ est égal à l'ensemble des fonctions $t \in \mathbb{R} \longmapsto Ce^{At}$, où C parcourt $\mathbb{K}^n$.*
- *Chaque colonne de la matrice e^{tA} est solution de $X' = AX$, et la famille de ces n colonnes forme une base de $\mathscr{S}_{(H)}$, i.e un système fondamental de solutions.*

Corollaire II.3

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $t_0 \in I, X_0 \in \mathbb{K}^n$. L'unique solution sur $\mathbb{R}$ au problème de Cauchy en (t_0, X_0) du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$ est la fonction $t \longmapsto e^{A(t-t_0)}X_0$.

Corollaire II.4

Si A est diagonalisable, soient $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{C}^n$ une base de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Alors, en notant pour tout $k \in [\![1, n]\!], e_k : t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{\lambda_k t}X_k \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$, la famille de fonctions $(e_1, \dots, e_n)$ forme une base de solutions de $(\mathcal{H})$.

Exemples :

Résumons les outils dont on dispose pour résoudre $X' = AX$.

- On peut calculer l'exponentielle de tA, mais cela s'avère vite laborieux, à part lorsque A est diagonalisée, ou encore nilpotente.
- On pourra préfèrer, lorsque A est diagonalisable, écrire $A = PDP^{-1}$ et résoudre $Y' = DY$ où $Y = P^{-1}X$. Notons qu'il est ici inutile d'inverser P.
  On peut aussi utiliser le corollaire précédent dans ce cas.
- Enfin, si A n'est pas DZ, on pourra la trigonaliser et résoudre le système $Y' = DY$ en commençant par les dernières équations.
  Le programme précise que pour les calculs explicites, on se bornera aux deux cas $n \leqslant 3$ ou A est diagonalisable.

III Quelques méthodes de résolution

§ 1. ***Cas des équations scalaires d'ordre*** 1.– du type

$$(E) \qquad \boxed{x'(t) + a(t)x(t) = b(t)}$$

où a et b sont continues à valeurs complexes sur I. On sait les résoudre par quadrature. Pour cela, on peut noter A une primitive de a sur I et utiliser que

$$(E) \Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{A(t)}x(t)\right) = b(t)e^{A(t)}.$$

Cette méthode fonctionne à la fois pour les équations homogènes et les équations complètes.

§ 2. ***Cas des équations scalaires d'ordre*** 2 ***à coefficients constants.***– On considère ici l'équation

$$(H) \qquad \boxed{y'' + ay' + by = 0}$$

où a et b sont des constantes.

On appelle **équation caractéristique** associée à cette équation différentielle l'équation en r : $r^2 + ar + b = 0$ et $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant.

- **Cas 1 :** Si $\Delta \neq 0$, alors (E_c) admet deux solutions disctinctes r_1 et r_2, et $y \in \mathrm{Sol}_H \Longleftrightarrow$ il existe $A, B \in \mathbb{C}$ telles que
$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}.$$
- **Cas 2 :** Si $\Delta = 0$, alors (E_c) admet une solution r_0, et $y \in \mathrm{Sol}_H \Longleftrightarrow$ il existe $A, B \in \mathbb{C}$ telles que
$$y : x \in \mathbb{R} \mapsto Ae^{r_0 x} + Bxe^{r_0 x}.$$

§ 3. ***Méthode de Laplace.***– C'est une méthode permettant de résoudre une équation scalaire d'ordre 2 lorsque l'on connait une solution particulière y_0 de l'équation homogène. Pour cela on recherche y sous la forme $y : t \mapsto K(t)y_0(t)$. On injecte cette expression dans l'équation $(E) y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ pour se ramener à une EDL d'ordre 1 en K'.

Cette solution y_0 peut être donnée, ou au moins la classe de fonctions à laquelle elle appartient. Lorsqu'une solution est DSE en 0, on peut chercher son DSE en l'injectant dans l'EDL, ce qui devrait fournir une relation de récurrence entre ses coefficients. Il faudra vérifier que le rayon de la SE est non nulle, et savoir justifier en quoi ce raisonnement est cohérent.

§ 4. ***Méthode de variation DES constantes.***– Elle ne s'applique que lorsque l'on sait complètement résoudre l'équation homogène associée.

4.1 Cas des systèmes $X' = AX + B$ dont on connait un système fondamental de solutions de (E_H)

Ici, A peut ne pas être constante. Soit donc $(X_1, \dots X_n)$ un système fondamental de solutions de $X' = AX$, et W leur Wronskienne. Pour toute fonction $X : t \longmapsto \mathbb{K}^n$, il existe des fonctions numériques $\alpha_k : I \to \mathbb{K}$ telles que pour tout $t \in I, X(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(t)X_k(t)$. Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ car pour tout $t \in I, Y(t) = W^{-1}(t)X(t)$, où $Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

La fonction X est solution de $X' = AX + B \Longleftrightarrow WY' = B \Longleftrightarrow Y' = W^{-1}B$, que l'on sait résoudre par intégration.

4.2 Cas des équations scalaires d'ordre 2

i.e du type $x'' + ax' + bx = c \qquad (\mathscr{E})$, où a, b et c sont des fonctions scalaires continues sur I. Détaillons dans ce cas particulier le passage de l'ordre n à l'ordre 1 :

- A toute fonction f, on associe $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$.
- f est solution de $(\mathscr{E}) \Longleftrightarrow X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$.

- L'ensemble $\mathrm{Sol}_{(\mathscr{H})}$ des solutions de $(\mathscr{H}) : x''+ax'+bx=0$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathscr{C}^2(I,\mathbb{K})$.
- Soient (f_1,f_2) deux solutions de $(\mathscr{H})$. Le Wronskien de la famille (f_1,f_2) vaut $w=f_1f_2'-f_2f_1'$.
- (f_1,f_2) est une base $\iff w$ ne s'annule pas $\iff w$ n'est pas la fonction nulle.

Détaillons la méthode de variation des constantes :

Proposition III.1

Soit (f_1,f_2) un système fondamental de solutions de (H). Soit f une fonction scalaire de classe $\mathscr{C}^2$ sur I. Alors, il existe deux fonctions scalaires de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telles que $\forall t\in I$, $\left\{\begin{array}{l} f=\lambda f_1+\mu f_2\\ f'=\lambda f_1'+\mu f_2'\end{array}\right.$ *Alors,*

$$f \text{ est solution de } \mathscr{E} \iff \forall t\in I,\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda' f_1+\mu' f_2=0\\ \lambda' f_1'+\mu' f_2'=c\end{array}\right.$$

§ 5. ***Cas de l'équation de Sturm*** $y''+qy=0$**.–** cf TD.

IV Quelques exercices classiques

Exercices :

CCP 42 On considère les deux équations suivantes :
$2xy'-3y=0 \quad (H)$
$2xy'-3y=\sqrt{x} \quad (E)$

1. Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

Exercices :

CCP 32 :
Soit l'équation différentielle : $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

1. Trouver les solutions de cette équation différentielle développables en série entière à l'origine.
   Déterminer la somme des séries entières obtenues.
2. Est-ce que toutes les solutions de $x(x-1)y''+3xy'+y=0$ sur $]0;1[$ sont développables en série entière à l'origine ?

Exercices :

CCP 31

1. Déterminer une primitive de $x\longmapsto \cos^4 x$.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y''+y=\cos^3 x$ en utilisant la méthode de variation des constantes.